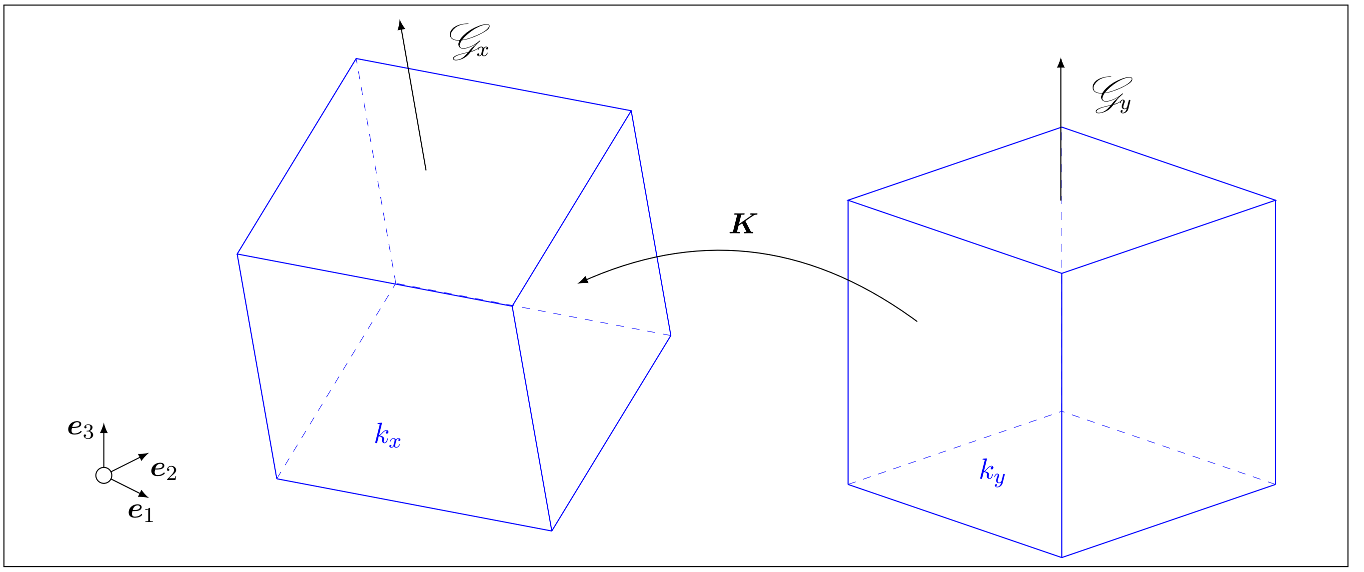
Nachweis Theorem 6.8

Seien k_x und k_y zwei elastische Gesetzte mit den Symmetrie-Gruppen $\mathscr{G}_x$ und $\mathscr{G}_y$.

1. Wenn $\boldsymbol{K}$ ein elastischer Isomorphismus zwischen k_x und k_y ist, dann gilt $\mathscr{G}_y = \boldsymbol{K}\ \mathscr{G}_x\ \boldsymbol{K}^{-1}$, $\boldsymbol{A}_x \in \mathscr{G}_x \Leftrightarrow \boldsymbol{K}\boldsymbol{A}_x\boldsymbol{K}^{-1} \in \mathscr{G}_y$
2. Wenn $\boldsymbol{K}$ ein Isomorphismus zwischen k_x und k_y, dann ist auch $\boldsymbol{A}_y\,\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{A}_x$ für alle $\boldsymbol{A}_x \in \mathscr{G}_x$ und $\boldsymbol{A}_y \in \mathscr{G}_y$ ein Isomorphismus.
3. Wenn $\boldsymbol{K}_1$ und $\boldsymbol{K}_2$ Isomorphismen zwischen k_x und k_y sind, dann sind $\boldsymbol{K}_1\,\boldsymbol{K}_2^{-1} \in \mathscr{G}_y$ und $\boldsymbol{K}_1^{-1}\,\boldsymbol{K}_2 \in \mathscr{G}_x$.



Nachweis 1:

- siehe Buch S. 188

Nachweis 2:

(1) $k_y(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{K}k_x(\boldsymbol{K}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{K})\boldsymbol{K}^T \qquad \forall\, \boldsymbol{C} \in \mathscr{P}sym$

(2) $k_x(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{K}^{-1}k_y(\boldsymbol{K}^{-T}\boldsymbol{C}\boldsymbol{K}^{-1})\boldsymbol{K}^{-T} \qquad \forall\, \boldsymbol{C} \in \mathscr{P}sym$

- es heißt:
  $\widetilde{\boldsymbol{K}} = \boldsymbol{A}_y\,\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{A}_x$ ist auch ein Isomorphismus für alle $\boldsymbol{A}_x \in \mathscr{G}_x$ und $\boldsymbol{A}_y \in \mathscr{G}_y$

$\rightarrow$ $\boldsymbol{A}_x \in \mathscr{G}_x$: $k_x(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}_x k_x(\boldsymbol{A}_x^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_x)\boldsymbol{A}_x^T$ (3)

$\rightarrow$ $\boldsymbol{A}_y \in \mathscr{G}_y$: $k_y(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}_y k_y(\boldsymbol{A}_y^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_y)\boldsymbol{A}_y^T$ (4)

- (3) in (1):
  $k_y(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{K}\boldsymbol{A}_x k_x(\boldsymbol{A}_x^T\boldsymbol{K}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{K}\boldsymbol{A}_x)\boldsymbol{A}_x^T\boldsymbol{K}^T$ (5)

- (5) in (4):
  $k_y(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}_y\boldsymbol{K}\boldsymbol{A}_x k_x(\boldsymbol{A}_x^T\boldsymbol{K}^T\boldsymbol{A}_y^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_y\boldsymbol{K}\boldsymbol{A}_x)\boldsymbol{A}_x^T\boldsymbol{K}^T\boldsymbol{A}_y^T$
  zusammengefasst: $k_y(\boldsymbol{C}) = \widetilde{\boldsymbol{K}}k_x(\widetilde{\boldsymbol{K}}^T\boldsymbol{C}\widetilde{\boldsymbol{K}})\widetilde{\boldsymbol{K}}^T$ mit $\widetilde{\boldsymbol{K}} = \boldsymbol{A}_y\,\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{A}_x$

- daraus folgt: $\widetilde{\boldsymbol{K}} = \boldsymbol{A}_y\,\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{A}_x$ ist ein Isomorphismus zwischen k_x und k_y!

Nachweis 3:

(1) $k_y(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{K}_1 k_x(\boldsymbol{K}_1^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{K}_1)\boldsymbol{K}_1^T \qquad \forall\, \boldsymbol{C} \in \mathscr{P}_{sym}$
(2) $k_y(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{K}_2 k_x(\boldsymbol{K}_2^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{K}_2)\boldsymbol{K}_2^T \qquad \forall\, \boldsymbol{C} \in \mathscr{P}_{sym}$
(3) $k_x(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{K}_1^{-1} k_y(\boldsymbol{K}_1^{-T} \boldsymbol{C} \boldsymbol{K}_1^{-1})\boldsymbol{K}_1^{-T} \qquad \forall\, \boldsymbol{C} \in \mathscr{P}_{sym}$
(4) $k_x(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{K}_2^{-1} k_y(\boldsymbol{K}_2^{-T} \boldsymbol{C} \boldsymbol{K}_2^{-1})\boldsymbol{K}_2^{-T} \qquad \forall\, \boldsymbol{C} \in \mathscr{P}_{sym}$

- (4) in (1):
  $k_y(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{K}_1 \boldsymbol{K}_2^{-1} k_y(\boldsymbol{K}_2^{-T} \boldsymbol{K}_1^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{K}_1 \boldsymbol{K}_2^{-1})\boldsymbol{K}_2^{-T} \boldsymbol{K}_1^T$
  zusammengefasst: $k_y(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}_y k_y(\boldsymbol{A}_y^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{A}_y)\boldsymbol{A}_y^T$ mit $\boldsymbol{A}_y = \boldsymbol{K}_1 \boldsymbol{K}_2^{-1}$

$\rightarrow$ $\boldsymbol{K}_1 \boldsymbol{K}_2^{-1} \in \mathscr{G}_y$
$\rightarrow$ $\boldsymbol{K}_1 \boldsymbol{K}_2^{-1}$ ist Symmetrietransformation für k_y

- (2) in (3):
  $k_x(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{K}_1^{-1} \boldsymbol{K}_2 k_x(\boldsymbol{K}_2^T \boldsymbol{K}_1^{-T} \boldsymbol{C} \boldsymbol{K}_1^{-1} \boldsymbol{K}_2)\boldsymbol{K}_2^T \boldsymbol{K}_1^{-T}$
  zusammengefasst: $k_x(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}_x k_x(\boldsymbol{A}_x^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{A}_x)\boldsymbol{A}_x^T$ mit $\boldsymbol{A}_x = \boldsymbol{K}_1^{-1} \boldsymbol{K}_2$

$\rightarrow$ $\boldsymbol{K}_1^{-1} \boldsymbol{K}_2 \in \mathscr{G}_x$
$\rightarrow$ $\boldsymbol{K}_1^{-1} \boldsymbol{K}_2$ ist Symmetrietransformation für k_x